

Предположим, что точность определения начальных условий $\Delta_1 \ll 1$, т.е. две фазовые точки, расстояние между которыми меньше либо равно Δ_1 , мы различить не можем. Пусть вся эволюция происходит в конечной области фазового пространства с характерным размером $R \sim 1$. За время

$$T_1 \sim \frac{1}{h} \ln \frac{R}{\Delta_1}$$

траектории разойдутся на расстояние порядка системы, т.е. предсказать уже ничего нельзя. Тогда

$$\Delta_2 \sim \exp(-hT_2) \sim \exp(-2hT_1) \sim \Delta_1^2,$$

т.е. для того, чтобы горизонт прогноза увеличился в два раза, нужна точность, равная квадрату предыдущей.

Пояснения.

Рассмотрим систему $x'(t) = f(x)$, $x(0) = x^0$. На первый взгляд, кажется очевидным, что если мы будем рассматривать асимптотическое поведение ограниченных решений системы уравнений при $t \rightarrow \infty$, то $x(t)$ будет стремиться либо к постоянной, либо к периодической функции, и мы можем дать прогноз о ее значении на сколь угодно большое время.

Однако Э. Лоренц показал, что это не так. Оказалось, что если вектор $\vec{x}$ имеет три или более компонент, то модели могут описывать детерминированное непериодическое движение. (Это важно, например, потому, что линейные предикторы, полученные с помощью метода авторегрессии, в принципе не могут описывать такое поведение.) Математическим образом установившихся режимов являются притягивающие множества в фазовом пространстве — аттракторы. Аттракторы, описывающие непериодическое движение, получили название странных.

Типичным и очень важным свойством странных аттракторов является чувствительность к начальным данным. Грубо говоря, это свойство означает, что почти все бесконечно близкие траектории с течением времени экспоненциально разбегаются.

Отличия от регулярного движения:

1. Сложные, неповторяющиеся траектории;
2. Непредсказуемость поведения системы на больших временах (зависимость от начальных условий).

Отличие от случайного процесса состоит в том, что нерегулярность происходит из самой системы, а не от внешнего фактора (шум, флуктуации). В ограниченном фазовом объеме экспоненциальное разбегание приводит к "запутыванию траекторий".